منظور از موفقیت در ریاضیات چیست؟

تجزیه و تحلیل ما از ریاضیاتی که باید آموخته شود، مطالعه پژوهش‌های مربوط به روانشناسی شناختی و آموزش ریاضی، تجربیاتمان به عنوان یادگیرندگان و معلمان ریاضی و قضاوت‌های حرفه ایمان، همگی ما را در انتخاب دیدگاهی ترکیبی نسبت به معنای موفقیت در یادگیری ریاضی هدایت کرده‌اند. چون پی بردیم که هیچ اصطلاحی تمام جنبه‌های تجربه، تبحر، دانش و مهارت در ریاضیات را در بر نمی‌گیرد، اصطلاح ورزیدگی ریاضی را انتخاب کردیم تا نشان دهیم منظورمان از این که هر فرد باید ریاضیات را با موفقیت بیاموزد، چیست.

ورزیدگی ریاضی **پنج مؤلفه** دارد:

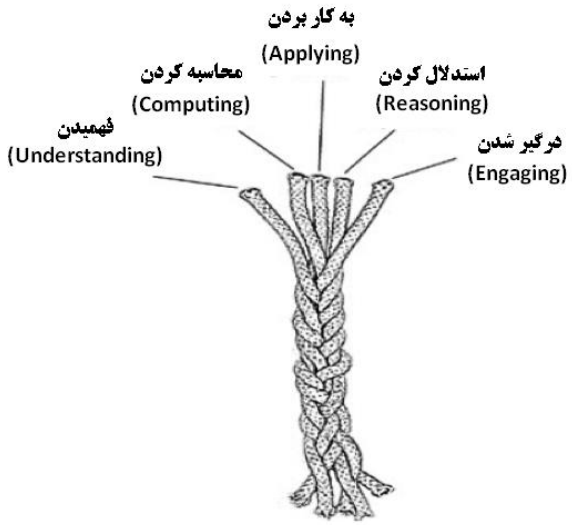
۱. **فهمیدن:** درک مفاهیم، اعمال و روابط ریاضی، دانستن معنای نمادهای ریاضی، نمودارها و رویه‌ها.

۲. **روانی در محاسبه:** اجرای رویه‌های ریاضی، نظیر جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد به طور منعطف، دقیق، کارا و مناسب.

۳. **به‌کار بردن:** توانایی صورت بندی مسایل به صورت ریاضی و تدوین راهکارهایی جهت حل آن‌ها با استفاده از مفاهیم و رویه‌های مناسب

۴. **استدلال کردن:** استفاده از منطق جهت توضیح و توجیه راه حلی برای یک مسأله یا تعمیم چیزی معلوم به چیزی که هنوز معلوم نیست.

۵. **درگیر شدن:** دیدن ریاضیات، به صورت محسوس، مفید و قابل انجام به شرطی که روی آن کار کنید و بخواهید که آن کار را انجام دهید.



۵ مؤلفه ورزیدگی در ریاضیات

مهم‌ترین ویژگی ورزیدگی ریاضی این است که این پنج مؤلفه به هم وابسته و در هم تنیده‌اند. سایر دیدگاه‌ها نسبت به یادگیری ریاضی مایلند که تنها به یک جنبه ورزیدگی تأکید کنند و انتظار دارند که پیامد آن، توسعه جنبه‌های دیگر باشد. مثلاً، بعضی از کسانی که بر نیاز دانش‌آموزان به کسب مهارت در محاسبات تأکید دارند، فرض می‌کنند که در پی کسب این مهارت، فهمیدن ریاضی حاصل می‌شود؛ یا کسانی که فهمیدن مفاهیم را مورد نظر دارند، تصور می‌کنند که با ایجاد فهم و درک، مهارت در محاسبه نیز به طور طبیعی کسب می‌شود. با استفاده از این پنج مؤلفه کوشیده ایم تصویر همه جانبه تری از یادگیری توأم با موفقیت در ریاضیات را ارائه کنیم.

در این کتاب فرض غالب این است که تمام دانش‌آموزان می‌توانند و باید در ریاضیات ورزیده شوند. همان گونه که همه دانش‌آموزان می‌توانند با مهارت بخوانند همه می‌توانند در ریاضیات مدرسه‌ای نیز ماهر شوند. ورزیدگی ریاضی چیزی نیست که دانش‌آموزان وقتی به پایه هشتم یا دوازدهم می‌رسند آن را کسب کنند؛ ورزیدگی می‌تواند در همه پایه‌ها کسب شود. علاوه بر این، ورزیدگی ریاضی دیگر فقط به رده خاصی از دانش‌آموزان محدود نمی‌شود. اگر قرار است ایالات متحده نیروی کار تحصیل کرده و شهروندانی پرورش دهد که دنیای فردا به آن‌ها نیاز دارد، تمام آمریکایی‌های جوان باید بیاموزند ریاضی وار بیندیشند.

پنج مؤلفه:

(۱) فهمیدن:

درک مفاهیم، اعمال و روابط ریاضی، دانستن معنای نمادهای ریاضی، نمودارها و رویه‌ها.

منظور از فهمیدن، درک ایده‌های بنیادی ریاضی توسط دانش‌آموز است. دانش‌آموزانی که فهم ریاضی دارند، به چیزی بیش از حقایق و رویه‌های منفک از هم دست می‌یابند. آن‌ها می‌دانند چرا یک ایده ریاضی مهم است و زمینه‌هایی را که به کارگیری آن مفید است می‌شناسند. علاوه بر این، دانش‌آموزان از بسیاری از ارتباطات و پیوندهای بین ایده‌های ریاضی آگاه هستند. در حقیقت، درجه فهم دانش‌آموزان با ژرفا و وسعت این ارتباطات و اتصالات مرتبط است.

به طور مثال، دانش‌آموزانی که تقسیم کسرها را می‌فهمند، نه تنها ۶ تقسیم بر دو سوم مساوی ۹ را محاسبه می‌کنند، بلکه می‌توانند عمل تقسیم را با شکل نیز نمایش دهند و در ارتباط با این محاسبه، مسأله‌ای هم طرح کنند (اگر در دستور پخت کیک نوشته شده باشد که به دو سوم پیمانه شکر نیاز است و ما ۶ پیمانه شکر در اختیار داشته باشیم، این مقدار شکر چند برابر دستور پخت کیک است؟)

دانش‌آموزانی که ریاضی را با فهم و درک یاد می‌گیرند، نیاز به صرف وقت زیاد برای یادگیری ندارند، زیرا الگوهای مشترک را بین وضعیت‌های ظاهراً متفاوت می‌بینند. اگر به این اصل کلی پی ببرند که جابجایی در ضرب تأثیر ندارد - مثلاً ۳ ضربدر ۵ همان ۵ ضربدر ۳ است- آن‌ها تقریباً نصف حقایق مربوط به ضرب اعداد را آموخته‌اند. یا اگر دانش‌آموزان این اصل کلی را یاد بگیرند که اگر اندازه ابعاد یک شیء سه بُعدی (نظیر قوطی کبریت) را n برابر کنیم، حجمش n به توان سه برابر می‌شود، آنگاه می‌توانند وضعیت‌های بسیار را درک کنند که در آن‌ها، اشیاء در شکل‌های مختلف، به یک نسبت بزرگ یا کوچک می‌شوند (به طور مثال، می‌توانند بفهمند چرا ارتفاع پیمانه‌ای که حجمش ۱۶ واحد مکعب است، به مراتب کمتر از نصف ارتفاع پیمانه‌ای به همان شکل است که حجمش ۸ واحد مکعب است).

دانشی که از فهمیدن به دست می‌آید، اساسی برای به خاطر آوردن یا بازسازی حقایق و روش‌های ریاضی و مبنایی برای حل مسائل تازه و ناآشنا و تولید دانش جدید می‌شود. مثلاً، دانش‌آموزانی که عملیات با اعداد حسابی را خوب بفهمند، می‌توانند همین مفاهیم و رویه‌ها را برای انجام عملیات بر روی اعداد اعشاری نیز تعمیم دهند.

هم چنین، فهمیدن به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا در حل مسأله از خطاهای اساسی پرهیز کنند - به ویژه مسائلی که به بزرگی اعداد مربوط می‌شوند- هر دانش‌آموزی که فهم خوبی از اعداد داشته باشد و از ضرب ۸۳/۹ در ۶۵/۷ عدد ۹۵/۷۵۱۹ را به دست آورد، باید بلافاصله به خطای خود پی ببرد، چون می‌داند پاسخ نمی‌تواند بیش از ۱۰ ضرب در ۸ یعنی ۸۰ باشد، زیرا یکی از این دو عدد کمتر از ۱۰ و دیگری کمتر از ۸ است. این استدلال به دانش‌آموز می‌فهماند که احتمالاً ممیز جا به جا شده است.

(۲) روانی در محاسبه:

اجرای رویه‌های ریاضی نظیر جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد به نحوی منعطف، دقیق، کارا و مناسب

محاسبه، شامل آشنایی کافی با رویه‌هایی برای جمع، تفریق، ضرب و تقسیم ذهنی یا با استفاده از کاغذ و قلم و نیز دانستن زمان و نحوه استفاده مناسب از این رویه‌ها است. هر چند کلمه محاسبه عمدتاً رویه‌های رایج در حساب را تداعی می‌کند، اما، در این سند، آشنایی کافی با رویه‌های سایر شاخه‌های ریاضی نظیر اندازه گیری (محاسبه طول)، جبر (حل معادلات)، هندسه (رسم شکل‌های مشابه) و آمار (رسم نمودار داده‌ها) نیز محاسبه تلقی می‌شوند. منظور از **روانی**، داشتن مهارت در به کار بردن کارا، دقیق و منعطف رویه‌ها است.

دانش‌آموزان نیازمندند ترکیبی از اعمال اصلی (جمع، تفریق، ضرب و نظایر آن‌ها) را سریع و دقیق انجام دهند. هم چنین، نیازمندند الگوریتم‌ها را دقیق و کارا بیاموزند. رویه‌های گام به گام را برای جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد حسابی چند رقمی، کسرها و اعداد اعشاری و برای انجام سایر محاسبات یاد بگیرند. مثلاً، تمام دانش‌آموزان باید الگوریتمی برای ضرب ۶۴

در ۳۷ داشته باشند که آن را بفهمند، به اندازه کافی کارا باشد و آنقدر عمومی که بتواند در مورد سایر اعداد دو رقمی نیز به کار رود و قابل گسترش برای ضرب اعداد بزرگ‌تر هم باشد.

استفاده از ماشین حساب نباید تهدیدی برای توسعه مهارت‌های محاسباتی باشد. به عکس، ماشین حساب‌ها می‌توانند هم فهمیدن و هم روانی در محاسبه را تقویت کنند. اما نظیر هر ابزار تدریسی دیگری، از ماشین حساب و رایانه هم می‌توان به طور مؤثر استفاده کرد و هم به طور نامناسب و غیر مؤثر.

معلمان باید روش استفاده از این ابزارها را یاد بگیرند و استفاده از آن‌ها را چنان به دانش‌آموزان یاد دهند که حامی تمام مؤلفه‌های ورزیدگی باشد و آن‌ها را با هم تلفیق کند.

دقت و کارایی در استفاده از رویه‌ها اهمیت دارند و محاسبه نیز قدرت درک را بالا می‌برد. با به کار بردن رویه‌هایی به قدر کافی کلی برای حل تمام مسائل از یک رده خاص، نظیر رویه جمع کردن دو کسر، دانش‌آموزان می‌فهمند که ریاضیات قابل پیش بینی و خوش ساختار است و الگوهای فراوان دارد و به ارزش آن‌ها پی می‌برند.

وقتی دانش‌آموزان صرفاً رویه‌ها را به خاطر می‌سپارند، ممکن است نتوانند ایده‌های عمیق تری را درک کنند که به خاطر سپردن گام‌ها و به کار بردن آموخته‌ها را برایشان آسان‌تر می‌نماید. به طور مثال، هنگام تفریق بسیاری از دانش‌آموزان بدون توجه به این که عدد کجا قرار گرفته، عدد کوچکتر موجود در هر ستون را از عدد بزرگ‌تر کم می‌کنند و به پاسخ‌های غلطی نظیر مثال روبه‌رو دست می‌یابند. کودکی که با درک موضوع، تفریق را می‌آموزد، به ندرت این گونه خطاها را انجام می‌دهد.

۶۲
— ۴۸
(به جای ۱۴) ۲۶

در ریاضیات مدرسه‌ای ایجاد مهارت‌های محاسباتی و ایجاد فهم و درک، گویی رقیب یکدیگرند. اما، قرار دادن مهارت در مقابل فهم و درک، تقابل نادرستی پدید می‌آورد. فهمیدن، یاد گرفتن مهارت‌ها را آسان‌تر می‌سازد و در عین حال یاد گرفتن رویه‌ها، فهمیدن ریاضیات را تقویت می‌کند و آن را گسترش می‌دهد.

(۳) به‌کار بردن:

صورت بندی مسائل به صورت ریاضی و تدوین راهکارهایی جهت حل آن‌ها با استفاده از مفاهیم و رویه‌های مناسب

به کار بردن، متضمن این است که فرد از دانش مفهومی و دانش رویه‌ای خود برای حل مسائل استفاده کند. یک مفهوم یا رویه وقتی مفید است که دانش‌آموز تشخیص دهد کی و کجا کاربرد دارد و نیز کی و کجا قابل استفاده نیست. در مدرسه، به دانش‌آموزان مسائل خاصی برای حل کردن می‌دهند، اما در بیرون از مدرسه بخشی از مشکل پی بردن به این نکته است که دقیقاً، مسأله چیست[1]. بنابراین، لازم است دانش‌آموزان بتوانند مسأله نیز طرح کنند، راهبردهای مناسب برای حل آن بیافرینند و مفیدترین روش را برای حل مسأله برگزینند. لازم است بدانند چگونه کمیت‌ها را در ذهن تجسم کنند یا آن‌ها را روی کاغذ به تصویر کشند. هم چنین لازم است بدانند چگونه باید معلوم‌ها و اطلاعات مرتبط را تشخیص دهند و بر اساس آن‌ها، مجهول‌ها را بشناسند.

همیشه می‌توان مسائل معمولی را با استفاده از رویه‌های متعارف حل کرد. مثلاً ، بسیاری از دانش‌آموزان پایه دوم می‌دانند که برای پاسخ دادن به پرسش زیر، باید از عمل جمع استفاده کنند:

«اگر ۱۲ دانش‌آموز در مینی بوس باشند و ۷ نفر دیگر به آن‌ها بپیوندند، چند دانش‌آموز در مینی بوس خواهند بود؟»

اما برای مسائل غیر معمولی، دانش‌آموزان باید راهی برای درک مسأله و حل آن بیابند. به طور مثال، ممکن است از دانش‌آموز پایه دوم سؤال شود: «مینی بوس ۷ ردیف صندلی دارد که روی هر صندلی ۲ یا ۳ نفر جا می‌گیرند. برای نشستن ۱۹ نفر بر روی ۷ ردیف صندلی موجود، روی چند صندلی باید ۲ نفر و روی چند صندلی باید ۳ نفر بنشینند؟» برای پاسخ دادن به این پرسش، آن‌ها باید روشی برای حل بیافرینند، کمیت‌های موجود در مسأله را بفهمند، روابط بین آن‌ها را درک کنند و

[1] شناخت مسأله و درک آن، بخش مهمی از فرآیند حل مسأله است که جرج پولیا در کتاب **چگونه مسأله را حل کنیم**، به طور مبسوط به آن پرداخته است. هم چنین، براون در کتاب **هنر حل مسأله**، راجع به چگونگی ایجاد این مهارت در دانش‌آموزان، بحث‌های جالبی مطرح کرده است.

مهارت‌های محاسباتی لازم برای حل مسأله را داشته باشند (یعنی بر خلاف مسائل معمولی، تنها با انتخاب یک رویه، نمی‌توان این مسأله را حل کرد بلکه پیش نیاز انتخاب رویه، فهم و درک اشاره شده است).

(۴) استدلال کردن:

استفاده از منطق، جهت توضیح و توجیه یکی از جواب‌های مسأله یا بسط چیزی معلوم به چیزی که هنوز معلوم نیست.

استدلال، چسبی است که ریاضیات را انسجام می‌بخشد. با اندیشیدن درباره روابط منطقی بین مفاهیم و موقعیت‌ها، دانش‌آموزان می‌توانند غرق حل مسأله شوند و روابط بین آن‌ها را دریابند. مثلاً، اگر فرصتی در اختیار یک دانش‌آموز پایه چهارم گذاشته شود که اعداد زوج و فرد را بررسی و درباره آن‌ها بحث کند، آنگاه می‌تواند بفهمد چرا حاصل جمع یک عدد فرد و یک عدد زوج، عددی فرد خواهد بود.

یکی از بهترین روش‌ها برای تقویت توانایی استدلالی دانش‌آموزان این است که راه حل‌های خود را برای دیگران شرح دهند یا توجیه کنند. مثلاً، پس از تدریس روش محاسبه جمع اعداد کسری، گاه لازم است از دانش‌آموز خواسته شود تا به جای استفاده از آن روش برای انجام تمرین‌ها، آن روش را توضیح دهد و به توجیه آن بپردازد. در فرآیند بیان اندیشه‌ها و ایجاد ارتباط فکری، مهارت استدلال کردن آن‌ها پرورش می‌یابد.

»استدلال کردن» با سایر مؤلفه‌های ورزیدگی ریاضی، به ویژه، هنگامی که دانش‌آموزان به حل مسأله مشغولند، تعاملی قوی دارد. دانش‌آموزان هنگام ارائه دلیل در مورد یک مسأله، بهتر می‌فهمند، محاسبات لازم را انجام دهند، دانش خود را به کار می‌بندند، استدلال خود را برای دیگران شرح می‌دهند و می‌بینند که ریاضی محسوس و قابل انجام است.

(۵) درگیر شدن:

پی بردن به این نکته که ریاضیات، محسوس، مفید و قابل انجام است، با این شرط که شخص پشتکار داشته باشد و بخواهد آن را بیاموزد.

درگیر شدن با فعالیت‌های ریاضی، راز موفقیت است. دیدگاه ما نسبت به ورزیدگی ریاضی فراتر از این است که فرد قادر به درک، محاسبه، به‌کار بردن و استدلال کردن باشد. ورزیدگی ریاضی شامل درگیر شدن با ریاضی هم هست:

دانش‌آموزان باید شخصاً نسبت به این ایده که «ریاضی با معناست و می‌توان با تلاش کافی آن را یاد گرفت و در مدرسه و بیرون از مدرسه آن را به کار برد» متعهد باشند. دانش‌آموزانی که در ریاضی‌ورزیده هستند آن را حس می‌کنند و مفید و ارزنده اَش می‌دانند و بر این باورند که تلاششان برای یادگیری ریاضی نتیجه خواهد داد؛ آن‌ها خود را به عنوان یادگیرنده، انجام دهنده و استفاده کننده مؤثر ریاضی می‌بینند.

لازمه موفقیت در یادگیری ریاضیات این است که به موضوع درس با دید مثبت نگاه شود: دانش‌آموزانی که درگیر انجام دادن ریاضیات هستند، باور ندارند که چیزی مرموز به نام «ژن ریاضی» وجود دارد که موفقیت را تضمین می‌کند. آن‌ها باور دارند که با تلاش کافی و تجربه، می‌توانند یاد بگیرند. اگر قرار است دانش‌آموزان، ریاضی یاد بگیرند، باید ریاضی را انجام دهند و از آن به طور مؤثر استفاده کنند. دانش‌آموزان نباید به ریاضی، به عنوان مجموعه‌ای از قواعد و رویه‌های دلخواه نگاه کنند. در عوض، باید آن را موضوعی ببینند که در آن، اشیاء به طور منطقی و با معنا به هم مرتبطند و لازم است به این باور برسند که قادر به فهمیدن آن هستند.

درگیر شدن فرد با ریاضی مستلزم ایجاد فرصت‌های مکرر برای فهمیدن و درک آن است تا فرد، لذت آن فهمیدن را تجربه کند و پشتکاری را که برای فهمیدن ریاضی به خرج داده تشخیص دهد و از آن بهره ببرد. وقتی دانش‌آموزان در ریاضیات ورزیده می‌شوند نسبت به توانایی خود برای آموختن ریاضیات و استفاده از آن اعتماد به نفس بیشتری پیدا می‌کنند. هر چه بیشتر مفاهیم ریاضی را درک کنند، کل موضوع برای آن‌ها ملموس‌تر می‌شود. در مقابل، وقتی دانش‌آموزان فکر کنند که به جای فهمیدن ریاضی باید آن را با به خاطر سپردن بیاموزند، اعتماد به نفس خود را به عنوان یادگیرنده از دست می‌دهند.

دانش‌آموزانی که در ریاضی‌ورزیده هستند بر این باورند که می‌توانند مسأله‌ها را حل کنند، درک خود را گسترش دهند و با تلاش فراوان، رویه‌ها را بیاموزند و اینجاست که ورزیده بودن در ریاضی برایشان با ارزش می‌شود.

تلفیق مؤلفه‌های ورزیدگی

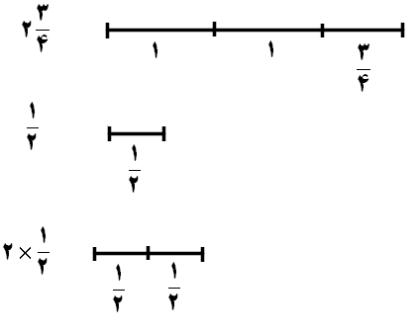
همان گونه که هیچ چهار پایه‌ای نمی‌تواند تنها بر روی یکی یا حتی دو تا از پایه‌هایش قرار گیرد، ورزیدگی ریاضی هم نمی‌تواند با پرداختن به یکی یا دو تا از مؤلفه‌های جدا از هم حاصل شود. برای کسب ورزیدگی ریاضی دانش‌آموزان باید در تمام سال‌های دوره ابتدایی و راهنمایی، هر پنج مؤلفه را یاد بگیرند.

در هر لحظه از تدریس یک درس یا یک واحد ریاضی، می‌توان بر یک یا دو مؤلفه تأکید کرد. اما، در نهایت، لازم است تمام مؤلفه‌ها مورد توجه قرار گیرند تا ارتباط بین آن‌ها تقویت شود. مثلاً، اگر هدف اصلی یک جلسه درس، بالا بردن درک دانش‌آموز از یک مفهوم ریاضی باشد، ممکن است به حل مسأله نیز پرداخته شود و این کار مستلزم چند محاسبه هم باشد. یا ممکن است به جای ارائه یک تعریف و چند مثال، از دانش‌آموزان خواسته شود در مورد ایده‌ای که تازه معرفی شده است دلیل بیاورند. علاوه بر این، در طول سال تحصیلی دانش‌آموزان باید فرصت داشته باشند تا بر ترکیبات گوناگونی از این مؤلفه‌ها تمرکز کنند. اگر معلمان همواره تنها بر یک یا دو مؤلفه تأکید ورزند و از مؤلفه‌های دیگر غفلت کنند، ریاضیاتی که دانش‌آموزان می‌آموزند، به احتمال زیاد، ناقص و شکننده خواهد بود.

آموختن هر یک از مؤلفه‌ها به تنهایی بسیار دشوارتر از یادگرفتن آن‌ها با هم است. در واقع، تقریباً غیر ممکن است که در هر یک از مؤلفه‌ها به طور مجزا، خبره شد. به همین دلیل، دانش‌آموزی که بخواهد مثلاً تمام قواعد مربوط به کسرها و اعداد اعشاری را به طور مجزا بیاموزد، با دشواری بسیار مواجه می‌شود. پرداختن به تمام مؤلفه‌های ریاضی، دانش ریاضی را قوی تر، با دوام‌تر، سازگارتر، مفیدتر و مرتبط‌تر می‌کند.

تلفیق مؤلفه‌های ریاضی‌ورزی، کاملاً با رویکردهای مرسوم یادگیری دانش‌آموزان سازگار است. مثلاً وقتی کودکی مطلبی را می‌فهمد، رویه‌های محاسباتی آن را هم بهتر به یاد می‌آورد و از آن‌ها در حل مسأله با انعطاف بیشتری استفاده می‌کند. در عوض، وقتی کودک در استفاده از رویه‌ها ماهر می‌شود و به طور خود به خودی آن‌ها را به کار می‌گیرد، آنگاه می‌تواند درباره جنبه‌های دیگر یک مسأله بیندیشد و با مسائل جدید دست و پنجه نرم کند که این کار او را به فهم و درک تازه‌ای رهنمون می‌سازد.

در مدارس امروزی ایالات متحده غالباً فرض می‌شود که کودکان باید مهارت‌های خاصی کسب کنند تا بتوانند رویه‌ها را بفهمند و آن‌ها را به کار گیرند. گویی کودکان قبل از این که تمام نت‌های موسیقی را یاد بگیرند، نمی‌توانند ضرب آهنگی بنوازند. اما دانش‌آموزان قبل از این که برای انجام عمل تقسیم کسرها، رویه «کسر دوم را معکوس کن و بعد در کسر اول ضرب کن» را بیاموزند، می‌توانند بفهمند که نواری به طول دو و سه چهارم فوت را می‌توان به پنج و نیم نوار یک دوم فوتی تقسیم کرد. در واقع، حل چنین مسایلی می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا رویه «کسر دوم را معکوس کن و بعد ضرب کن» را بفهمند. مثلاً ممکن است دانش‌آموزان مشاهده کنند که یک نوار یک فوتی، شامل دو نوار یک دوم فوتی است. در نتیجه، با ضرب دو و سه چهارم در دو (یعنی معکوس یک دوم) می‌توان تعداد کل نوارهایی به طول یک دوم فوت را یافت که از یک نوار دو و سه چهارم فوتی به دست می‌آید.



$$2\frac{3}{4}=2\frac{3}{4}\times 1=2\frac{3}{4}\times 2\left(\frac{1}{2}\right)=5\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow \quad 2\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}=2\frac{3}{4}\times 2=5\frac{1}{2}$$

همان گونه که با گوش سپردن به تک تک سازها به نوبت، نمی‌توان یک سمفونی را گوش داد، ورزیدگی ریاضی نیز با آموختن هر یک از مؤلفه‌های آن به طور مجزا به دست نمی‌آید. تدریس باید از تمایل طبیعی دانش‌آموزان برای استفاده از تمام مؤلفه‌های ورزیدگی ریاضی بهره ببرد. بدین ترتیب، دانش‌آموزان می‌فهمند و می‌دانند چگونه رویه‌هایی را به کار گیرند که اغلب از بر کردن صرف آن‌ها انتظار می‌رفت.

تلفیق مؤلفه‌های ورزیدگی برای یادگیری ترکیب‌های عددی

از زمان‌های گذشته تا به حال، در ایالات متحده، «یادگیری جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد یک رقمی به عنوان حقایق پایه یا ترکیب‌های عددی» شناخته شده است و به طور مرسوم، از دانش‌آموزان انتظار می‌رود که فقط این حقایق یا ترکیبات را حفظ کنند. در حالی که پژوهش نشان می‌دهد که دانش‌آموزان هنگام یاد گرفتن انجام عملیات اعداد تک رقمی، در واقع از مسیر روش‌های حل نسبتاً جا افتاده عبور می‌کنند. این درک عمیق‌تر از نحوه یادگیری دانش‌آموزان، نشان می‌دهد که علاوه بر توانایی محاسباتی، چگونه می‌توان چهار مؤلفه دیگر ورزیدگی را از طریق یاد گرفتن ترکیب‌های عددی (انجام چهار عمل اصلی با اعداد تک رقمی) تقویت کرد.

فهمیدن

ترکیب‌های عددی (انجام چهار عمل اصلی با اعداد تک رقمی) به هم مرتبطند. تشخیص این ارتباط‌ها و حُسن استفاده از آن‌ها می‌تواند یادگیری ترکیب‌های عددی را آسان‌تر نماید و آن‌ها را کمتر در معرض فراموشی قرار دهد که بدین ترتیب، اشتباهات دانش‌آموزان نیز کاهش می‌یابد. مثلاً، دانش‌آموزان به سرعت می‌فهمند که مجموع ۵ بیسکویت و ۴ بیسکویت یکی بیشتر از مجموع ۴ بیسکویت و ۴ بیسکویت است.

دانش‌آموزان برخی از ترکیب‌های عددی را زودتر از دیگر ترکیب‌ها یاد می‌گیرند. به طور مثال، دانش‌آموزان غالباً مجموع عدد با خودش (مثل ۶+۶ و ۹+۹) و مجموع دو عددی را که ده می‌شوند (مثل ۳+۷) زودتر از سایر ترکیب‌های عددی (نظیر ۷+۶ که یکی بیشتر از ۶+۶ است و ۵+۸ که برابر با ۳+۲+۸ است)، استفاده می‌کنند.

به‌کار بردن

از ارتباط بین جمع و تفریق و ضرب و تقسیم، می‌توان استفاده کرد و آموختن تفریق و تقسیم اعداد را برای دانش‌آموزان ساده نمود. مثلاً، برای محاسبه ۸-۱۳ می‌توان به دنبال عددی گشت که وقتی با ۸ جمع می‌شود ۱۳ به دست می‌آید. برای بسیاری از دانش‌آموزان، آسان‌تر است که تفریق را از طریق جمع یاد بگیرند.

یاد گرفتن چهار عمل اصلی را می‌توان به عنوان یک فعالیت حل مسأله در نظر گرفت. دانش‌آموزان از ترکیب‌های عددی که می‌شناسند برای تولید ترکیب‌های عددی که نمی‌شناسند استفاده می‌کنند. به طور مثال، چون محاسبه چند برابر کردن عدد ۵ نسبتاً آسان‌تر است، دانش‌آموزان می‌توانند از حاصل ۵ ضربدر ۸ برای محاسبه ۶ ضربدر ۸ استفاده کنند، یعنی:

$$۶ \times ۸ = ۵ \times ۸ + ۱ \times ۸$$

استدلال کردن

وقتی دانش‌آموزان درباره چگونگی انجام یک عمل خاص حرف می‌زنند، در واقع این فرصت برایشان فراهم می‌شود که روش حل خود را توضیح دهند. با توضیح راه حل، آن‌ها درک خودشان از روابط موجود را به نمایش می‌گذارند و آن را پالایش می‌کنند. یک مثال ممکن این است که دانش‌آموزی حین توضیح راه حل خود بگوید: «می دانم که ۴ ضربدر ۶ برابر ۲۴ است زیرا جدول ضرب ۴ را بلدم و ۸ ضربدر ۶ دسته دیگری از ۴ ضربدر ۶ هاست. پس ۸ ضربدر ۶ برابر است با ۲۴ به اضافه ۲۴ که این حاصل جمع ۴۸ است».

درگیر شدن

وقتی دانش‌آموزان روابط بین ترکیب‌های عددی را بررسی می‌کنند، می‌فهمند که این عملیات با معنا هستند و فقط، ارتباط‌های خاص بین اعداد را نمی‌آموزند. بدین ترتیب کم کم متوجه می‌شوند که قادرند از اعداد، برای حل مسائل عملی استفاده کنند. هم چنین، یاد می‌گیرند که اگر ترکیب‌های عددی را فراموش کنند، خود می‌توانند آن‌ها را بیافرینند. بدین ترتیب، آن‌ها به منابعی دست می‌یابند که می‌توانند به خود آموزش دهند و نیازی نداشته باشند که برای اطمینان از درستی پاسخ‌ها، به معلم تکیه کنند.

ورزیدگی ریاضی در توسعه توانایی استدلال مربوط به نسبت‌ها

نتایج ارزشیابی‌های ملی نشان می‌دهند که برای دانش‌آموزان پایه هشتم ایالات متحده، حل مسائل تناسب نظیر مسئله زیر غالباً دشوار است[۲].

«اگر دختری ۳ صفحه از کتابی را در ۴ دقیقه بخواند، با همان آهنگ در ۱۰ دقیقه چند صفحه می‌خواند؟»

اما، وقتی دانش‌آموزان تشویق می‌شوند مسایل تناسب را در وضعیت‌های مختلف بررسی کنند، به طور طبیعی تمام مؤلفه‌های ورزیدگی ریاضی را به کار می‌گیرند. علاوه بر این، وقتی تشویقشان کنیم که هنگام یاد گرفتن نحوه حل مسائل تناسب، مؤلفه‌های ورزیدگی را با هم تلفیق کنند، به موفقیت چشمگیر تری دست می‌یابند. برای این که روشن شود چگونه دانش‌آموزان مؤلفه‌های ورزیدگی را با هم تلفیق می‌کنند، به راه حل چند دانش‌آموز پایه پنجم برای مسأله زیر توجه کنید:

«الن، جیم و استیو با دو دلار، سه بالن پر شده با هلیوم خریدند. بعد تصمیم گرفتند برای تمام هم کلاسی‌های خود، بالن بخرند. برای ۲۴ بالن دیگر چقدر باید بپردازند؟»

- بلیندا پاسخ صحیح (۱۶ دلار) را با این ترتیب به دست آورد که ۲۴ دایره روی کاغذ کشید. سپس، دایره‌ها را سه تا سه تا خط زد و هر بار، در ستونی عدد ۲ را یادداشت کرد. سپس ۲های یادداشت شده را با هم جمع کرد.
- دامون ۲۴ را بر ۳ تقسیم کرد و ۸ دلار را به دست آورد. سپس ۲۴ را بر ۲ تقسیم کرد و به ۱۲ دلار رسید، ولی موفق نشد از این دو جواب، پاسخ صحیح را بیابد. پس این راه را رها کرد و با استفاده از مجموعه‌ای از مکعب‌های کوچک، هشت گروه ساخت که هر مجموعه از سه مکعب تشکیل شده بود. سپس این را بیان کرد که بهای هر گروه سه بالنی، ۲ دلار است و چون ۸ گروه داشتیم، پس بهای آن برابر ۸ ضربدر ۲ یعنی ۱۶ دلار است.
- مارتی با استفاده از ماشین حساب و تقسیم ۲ بر ۳ بهای هر بالن را حساب کرد. او با دیدن ۰٫۶۶۶۶۷روی ماشین حساب، آن را «عددی خنده آور» نامید. آنرا در ۲۴ ضرب کرد و عدد ۱۶ را به دست آورد.
- بعداً مارتی با بردار بزرگترش راجع به راه‌حل‌های مختلفی که دانش‌آموزان، مسأله مربوط به بالن را حل کرده بودند صحبت کرد. برادرش هم با استفاده از کسرهای برابر، راه دیگری برای حل این مسأله به او نشان داد: ۲ دلار به ازای سه بالن برابر است با چند دلار برای ۲۴ بالن؟ یعنی:

$$\frac{۲}{۳}=\frac{؟}{۲۴}$$

سپس توضیح داد که چون حاصل ضرب ۳ در ۸ برابر ۲۴ است، باید ۲ را در ۸ ضرب کنی تا مقدار مجهول (صورت کسر سمت راست) را به دست آوری. پس پاسخ ۱۶ دلار است.

حل این مسأله از راه‌های مختلف نشان می‌دهد که لازمه تسلط در چنین استدلال‌هایی، تلفیق تمام مؤلفه‌های ورزیدگی است. همه دانش‌آموزان مسأله را حل کردند اما از راه‌های متفاوت، راه حل برخی از آن‌ها عالمانه‌تر از دیگران بود. آن‌ها تنها با انجام دادن اعمالی روی اعداد مربوط به مسأله، به طور تصادفی به جواب نرسیدند بلکه همه راه حل مسأله را فهمیدند. همه آن‌ها فهمیدند که نسبت بین بالن‌ها و دلارها نباید تغییر کند. دایره‌های بلیندا و ستون ۲ دلارهای وی این مطلب را به خوبی نشان می‌دهد.

روانی دانش‌آموزان در به کارگیری رویه‌های گوناگون محاسباتی، نظیر شمارش و ضرب و تقسیم، به آن‌ها کمک کرد تا مسأله را حل کنند. هم چنین، هر دانش‌آموز قادر بود درباره وضعیت مسأله موجود استدلال کند و سایرین را در جریان حل مسأله خود قرار دهد. از همه آن‌ها انتظار می‌رفت که مسأله را بفهمند. بدین سبب همه تلاش کردند تا به یک راه حل مطمئن برسند، هر چند در ابتدا دامون با دو جواب مختلف کارش را آغاز کرد و مارتی به عددی خنده دار رسید.

این مثال نشان می‌دهد که چگونه دانش‌آموزان می‌توانند از مهارت‌های خود برای با معنا کردن ریاضی بهره ببرند و در موقعیت‌های پیچیده‌ای نظیر آن چه گذشت حل مسأله را آغاز کنند. با کسب تجربه بیشتر در مورد مسائل تناسب، دانش‌آموزان می‌توانند بدون این که ارتباط خود را با سایر مؤلفه‌های ورزیدگی ریاضی از دست بدهند، کار خود را تداوم بخشند و روش‌های کاراتری خلق کنند.

---

[۲] این مطلب همان استدلال مربوط به نسبت و تناسب است که از مباحث دشوار و مهم ریاضی دوره ابتدایی است.

ایجاد ورزیدگی در سال‌های ابتدایی و راهنمایی

نمی توان ورزیدگی ریاضی را چنین توصیف کرد که یا وجود دارد یا وجود ندارد. هر ایده مهم ریاضی را می‌توان در سطوح مختلف و به چندین طریق فهمید. واضح است که فهم دانش‌آموزان پایه اول از مفهوم جمع، مانند فهم یک ریاضیدان یا حتی یک بزرگسال معمولی از این مفهوم نیست. اما یک دانش‌آموز پایه اول هم می‌تواند در جمع اعداد یک رقمی ورزیده شود، به شرطی که در همین حوزه هم هر پنج مؤلفه ورزیدگی را به کار گیرد.

ورزیدگی در ریاضیات در طول زمان ایجاد می‌شود. بنابراین، هر سال که دانش‌آموزان به مدرسه می‌روند باید هم نسبت به محتوای جدید و هم محتوایی که قبلاً یاد گرفته‌اند ورزیده‌تر شوند. مثلاً، پایه سومی‌ها باید در انجام جمع با اعداد حسابی نسبت به زمانی که در پایه اول بودند، ورزیده‌تر شوند. اما، در هر پایه دانش‌آموزان باید بتوانند به شکلی ورزیدگی ریاضی خود را نشان دهند.

ایجاد ورزیدگی در تمام دانش‌آموزان

از نظر تاریخی در ایالات متحده، سیاست گذاری برای ریاضیات مدرسه‌ای بر این فرض قرار گرفته بود که تنها از گروه منتخبی از دانش‌آموزان می‌توان انتظار داشت تا در ریاضیات ورزیده شوند. در زمان حاضر این فرض دیگر خریدار ندارد. جوانانی که قادر نیستند ریاضی وار بیندیشند از فرصت‌های بسیاری در کسب امکانات موجود در جامعه محرومند و جامعه نیز از خدمات بالقوی این جوانان بی بهره است.

بسیاری از بزرگسالان فرض می‌کنند تفاوت‌های افراد در عملکرد ریاضی حاکی از تفاوت‌های ذاتی آن‌هاست و ارتباطی به تلاش‌های فردی یا فرصت‌های مختلف یادگیری آن‌ها ندارد. چنین انتظاراتی شدیداً توان کودکان را دست کم می‌گیرد. تمام کودکان می‌توانند اصول اولیه، مفاهیم و مهارت‌های ریاضی را یاد بگیرند. وقتی پدرها، مادرها و معلمان همه باور داشته باشند که تلاش کودکان نتیجه بخش است و وقتی که تدریس و یادگیری ریاضی با استفاده از تمام مؤلفه‌های ورزیدگی باشد عملکرد ریاضی تمام دانش‌آموزان ارتقا می‌یابد.

پژوهش دقیق نشان داده است که ورزیدگی ریاضی هدفی دست یافتنی است. در معدودی از مدارس سراسر کشور، درصد بالایی از دانش‌آموزان با سوابق گوناگون آموزشی، موفقیت زیادی در ریاضی کسب کرده‌اند. مداخله‌های به جا و حساب شده نیز در برخی از مدارسی که عملکرد ضعیفی در ریاضی داشته‌اند، باعث شده است تا دانش‌آموزان آنها پیشرفت قابل توجهی نشان دهند. در حال حاضر شناخت بیشتری درباره چگونگی یادگیری ریاضی کودکان وجود دارد، و انواع تدریس‌هایی که سبب پیشرفت ریاضی می‌شوند، معلوم‌اند.

شواهد پژوهشی نشان می‌دهند که همه، به جز درصد پایینی از دانش‌آموزان، می‌توانند خوب خواندن را یاد بگیرند. سرعت یادگیری دانش‌آموزان متفاوت است و ممکن است آن‌ها برای خوب خواندن به انواع و مقادیر متفاوتی از کمک‌های آموزشی نیازمند باشند، ولی همه می‌توانند در خواندن ورزیدگی کسب کنند. همین مطلب درباره یادگیری و انجام دادن ریاضی نیز صادق است.

موفقیت در کلاس‌هایی با دانش‌آموزان محروم

شواهد پژوهشی نشان می‌دهند که اگر ریاضی به طور منسجم و تلفیقی تدریس شود در دانش‌آموزان ورزیدگی ایجاد می‌شود. به طور مثال، در یک پژوهش ملی که در آمریکا و در مقیاس بزرگ انجام شد، دانش‌آموزان ۱۵۰ کلاس درس پایه‌های اول تا ششم در آن شرکت کردند و اغلب از خانواده‌های کم درآمد بودند. مهم‌ترین یافته این پژوهش این بود که تدریس ریاضی با تأکید بر تلفیق پنج مؤلفه ورزیدگی ریاضی، یادگیری دانش‌آموزان را ارتقا می‌بخشد. در این مطالعه، ۱۵۰ کلاس به دو گروه تقسیم شدند. در گروه اول، از برنامه درسی ریاضی متداول محاسبه- محور استفاده شد. در گروه دیگر، درک مفهومی مورد توجه قرار گرفت و در برنامه درسی این گروه، از انواع موضوعات ریاضی فراتر از حساب استفاده شد. در این گروه، معلمان برای ارتقای فهم و درک دانش‌آموزان از بازنمایی‌های چندگانه[۳] برای معرفی ایده‌های ریاضی استفاده کردند و بر مسایل غیر معمولی متمرکز شدند تا چگونگی به کارگیری مفاهیم را تقویت کنند. برای ایجاد روانی در محاسبه، بر راه حل‌های چندگانه برای هر مسأله تأکید و بحث‌های کلاسی به گونه‌ای هدایت شد که مستلزم استدلال منطقی باشد و دانش‌آموزان راه حل‌ها یا معانی بدیل نتایج یا رویه‌های ریاضی را کشف کنند.

عملکرد دانش‌آموزان کلاس‌های گروه اخیر در مقایسه با کلاس‌های گروه اول به صورت چشمگیری بهبود یافت. در پایان این پژوهش که دو سال طول کشید این دانش‌آموزان نه تنها فهم بیشتری از مهارت‌های پیشرفته ریاضی پیدا کردند، بلکه مهارتهای محاسباتی بیشتری را نیز کسب نمودند. در پژوهش‌های دیگر، مشابه همین نتایج در مورد خواندن و نوشتن نیز به دست آمده است.

این افسانه در تعلیم و تربیت متداول است که دانش‌آموزانی که در کلاس‌های مناطق بسیار فقیر آموزش می‌بینند، نباید قبل از تسلط بر مهارت‌های اولیه، درگیر کارهایی شوند که از نظر علمی پر چالش‌اند. اما این مطالعه، آن افسانه را باطل نمود و نشان داد تدریسی که حول محور پنج مؤلفه ورزیدگی ریاضی انجام شود، در مورد دانش‌آموزان محروم نیز بسیار مناسب و مؤثر است.

در «زورآزمایی ریاضی» حق با کدام جبهه است؟

در تلاش برای انجام اصلاحات در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ مهارت‌های محاسباتی دست کم گرفته شدند و به جای آن تأکید شد که دانش‌آموزان ریاضی را بفهمند و قادر به استفاده از آن باشند. حتی در موارد افراطی از دانش‌آموزان انتظار می‌رفت که بدون کمک یا با اندکی راهنمایی، به خلق یا ایجاد ریاضی بپردازند. واکنش به این تلاش‌ها باعث توجه فزاینده به یادگیری حافظه‌ای و مهارت‌های محاسباتی شد به گونه‌ای که از دانش‌آموزان انتظار می‌رفت تا رویه‌های معرفی شده توسط معلمان یا کتاب‌های درسی را به خوبی یاد بگیرند و قادر به استفاده از آن‌ها شوند. برخورد این وضعیت‌های متناقض «زورآزمایی ریاضی» نامیده شده است.

حق با کدام جبهه است؟ هیچ کدام! هر دو بسیار محدودند. وقتی افراد تنها از یک مؤلفه ورزیدگی جانبداری می‌کنند دیدگاهِ کلی هدف را از دست می‌دهند. چنین برخورد تنگ نظرانه‌ای با ریاضیات، ممکن است یکی از دلایل عملکرد ضعیف دانش‌آموزان آمریکایی در ارزیابی‌های ملی و بین المللی باشد.

اگر تدریس ریاضی بر اساس دیدگاه‌های افراطی صورت گیرد، نمی‌تواند تأثیر گذار باشد. به شرطی دانش‌آموزان در ریاضی‌ورزیده‌تر می‌شوند که مفاهیم اصلی ریاضی را بفهمند، هم چنان که اگر در رویه‌های محاسباتی ماهرتر شوند، مفاهیم را آسان‌تر می‌فهمند. دانش‌آموزان آمریکایی به مهارت و درک بیشتر نیازمندند و همراه با آنها باید توانایی به کار گرفتن مفاهیم را برای حل مسأله کسب کنند، به طور منطقی استدلال نمایند و ریاضیات را محسوس، مفید و قابل انجام ببینند. بدون توسل به همه این توصیه‌ها، دانشی شکننده، منقطع و ضعیف کسب خواهد شد.

---

[۳] بازنمایی‌های چند گانه به معنای نشان دادن یا معرفی یک ایده به شکل‌های مختلف است. مثلاً ، برای نشان دادن تقسیم کسرها، می‌توان از بازنمایی‌های پیوسته مثل مساحت مستطیل یا بازنمایی‌های گسسته مثل تعداد مهره‌ها استفاده کرد.

با دسترسی به ماشین حساب و رایانه، آیا هنوز هم لازم است دانش‌آموزان توانایی محاسبات قلم و کاغذی کسب کنند؟

بلی. در اثر دسترسی گسترده به انواع ماشین حساب‌ها، نیاز به انجام محاسبات پیچیده با کاغذ و قلم به شدت تقلیل یافته است. اما، دانش‌آموزان نیازمندند بدانند که در این محاسبات پیچیده چه اتفاقی می‌افتد و هنوز هم نیازمند یادگیری روش‌های محاسباتی ساده‌تر با کاغذ و قلم هستند، زیرا به آن‌ها کمک می‌کند تا در ریاضی‌ورزیده شوند. مثلاً، مهارت کافی در انجام ترکیب‌های اولیه عددی[۴]، جهت درک قواعد ضرب اعداد دو رقمی لازم است و غالباً روانی در محاسبه، برای حل مسایل جبری و شرح راه حل‌های آن‌ها واجب است. این که چه مقدار از وقت تدریس را باید صرف محاسبات پیچیده کاغذ و قلمی کرد، پرسشی است که باید در دهه‌های آینده همواره مطرح و به آن پاسخ داده شود.

تدریس به روش‌های قدیمی چه اشکالی دارد؟

برای حصول ورزیدگی ریاضی، تدریسی که در هر زمان تنها بر یکی از مؤلفه‌ها، نظیر تسلط در رویه‌های محاسباتی و بعد حل مسأله، متمرکز شود برای اغلب دانش‌آموزان بی فایده است. نتایج مطالعات گسترده ملی دهه‌های گذشته نشان می‌دهند که دانش‌آموزان، به جز در مورد اعداد حسابی، هرگز در توسعه مهارت‌های محاسباتی موفقیت چندانی نداشته‌اند و در به کار بستن مهارت‌هایی که آموخته‌اند نیز بسیار ناموفق بوده‌اند. هم چنین، آن‌ها درک چندانی از مفاهیم ریاضی به کار رفته در محاسبات یا حل مسأله، نشان نداده‌اند.

در حال حاضر که معلمان عهده دار تدریسِ مطالب زیادی هستند، چگونه می‌توانند به تمام مؤلفه‌های ورزیدگی ریاضی بپردازند؟

در دراز مدت، اگر ریاضیات به صورت تلفیقی تدریس شود، معلمان عملاً در وقت صرفه جویی می‌کنند، زیرا در ابتدا دانش‌آموزان مفاهیم را خوب یاد می‌گیرند و معلمان مجبور نیستند آن‌ها را چند بار توضیح دهند. دیگر معلمان وقت زیادی را برای هر مؤلفه به طور جداگانه صرف نمی‌کنند و سایر مؤلفه‌ها را تا زمان «آماده بودن» دانش‌آموزان به عقب نمی‌اندازند. در این صورت این پنج مؤلفه یکدیگر را حمایت می‌کنند و این کار باعث می‌شود که یادگیری ریاضی مؤثرتر و ماندگارتر گردد.

[۴] آموختن انجام چهار عمل اصلی با اعداد تک رقمی **یاد گرفتن ترکیبات اولیه عددی** یا **حقایق پایه** نامیده می‌شود.